Priklady na cviceni, implicitni funkce

Reseny priklad

Jedna se priklad 2 ze sbirky.

Je dan vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$.

a) Dokazte, ze je timto vztahem definovana funkce $y = f(x)$ v jistem okoli bodu 0, ktera je tridy C^∞ na tomto okoli a pro kterou plati $f(0) = 1$.

b) Dokazte, ze funkce f roste na nejakem okoli bodu 0.

c) Je funkce f na okoli 0 konvexni, nebo konkavni?

Reseni:

Pouzijeme vetu o implicitni funkci. Oznacme

$$F(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5,$$

pak jiste F je tridy C^∞ na celem $\mathbb{R}^2$ a $F(0, 1) = 0$. Dale rovnost

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 4xy + 4y^3 - 5y^4$$

plati na celem $\mathbb{R}^2$. Specialne

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = -1 \neq 0,$$

tedy dle vety o implicitni funkci existuje okoli U bodu 0, okoli V bodu 1 a funkce $f : U \to V$ takove ze

$$f(x) = y \iff F(x, y) = 0.$$

Dale jiste plati $f(0) = 1$, protoze $F(0, 1) = 0$. Dale vime, ze funkce F je tridy C^∞, tedy okoli U lze najit tak, aby $f \in C^\infty(U)$. Tim mame vyresene a).

K reseni b) a c) si musime nejprve uvedomit nasledujci fakt. Je-li funkce g definova a spojita na nejakem okoli bodu $x \in \mathbb{R}$ a $g(x) > 0$, pak existuje okoli bodu x na kterem plati $g > 0$. Toto je znamy fakt a plyne okamzite z definice spojitosti funkce. Tento fakt nyni muzeme aplikovat na $g = f'$, resp. $g = f''$.

b)

Spoceteme $f'(0)$ derivaci rovnosti $F(x, y) = 0$. Dostaneme

$$2x + 2f^2(x) + 2x2f(x)f'(x) + 4f^3(x)f'(x) - 5f^4(x)f'(x) = 0. \tag{1}$$

Dosadime $x = 0$, pouzijeme $f(0) = 1$ a ziskame $f'(0) = 2$. Odsud tedy $f'(0) > 0$ a protoze $f \in C^\infty(U)$, jiste f' je spojita na U a tedy muzeme pouzit vyse uvedeny fakt a konstatovat, ze $f' > 0$ na nejakem okoli bodu 0. Tedy f je vskutku rostouci na okoli bodu 0.

c)

Spocteme $f''(0)$ derivaci rovnosti (1). Dostaneme

$$\begin{aligned} 2 + 4f(x)f'(x) + 4f(x)f'(x) + 4x(f'(x)f'(x) + f(x)f''(x)) \\ +4 \cdot 3f^2(x)f'(x)f'(x) + 4f^3(x)f''(x) - 5 \cdot 4f^3(x)f'(x)f'(x) - 5f^4(x)f''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadime $x = 0$, pouzijeme $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ a ziskame

$$2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4f''(0) - 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 - 5f''(0) = 0,$$

odsud jiz snadno $f''(0) = -14 < 0$. Protoze f'' je spojita na U, jiste $f'' < 0$ na nejakem okoli 0 a tedy f je konkavni na nejakem okoli 0.